ĐỀ KIỂM TRA
HỌC SINH GIỎI VÒNG 1 LỚP 9
Quận 3 (2015-2016)
(Thi: thứ 7, 26-9-2015)

Bài 1

a) **Cho** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}(a,b,c\neq 0)$

Chứng minh $\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}$

b) **Rút gọn** $B=\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ **với** $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}-\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)(0<a<1)$

c) Tính : $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

Bài 2: **Giải pt**

a) $x^5=x^4+x^3+x^2+x+2$

b) $8x^2+\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{5}{2}$

c) $\begin{cases} x+\frac{1}{y}=2 \\ y+\frac{1}{z}=2 \\ z+\frac{1}{x}=2 \end{cases}$

Bài 3 **Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :** $M=-5x^2-2xy-2y^2+14x+10y-1$

Bài 4: **Chứng minh rằng** $10^n+18n-28\,\vdots\,27, \forall n\in N$

Bài 5: **Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC), các đường cao BI và CK cắt nhau tại H. Trên đoạn BH lấy điểm D sao cho** ADC **bằng** 90^0**. Gọi F là giao điểm của BE và CD. Chứng minh** $\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{DF^2}=\frac{4}{DE^2}$.

Bài 6: **Cho tam giác ABC có** $ABC=ACB=50^0$**. Lấy N là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho** $NBC=10^0$ **và** $NCB=20^0$**. Chứng minh tanANB. tanNBC = 1**

Bài 7: **Trên cạnh BC của hình vuông ABCD lấy** $BE=\frac{BC}{3}$**; trên tia đối của tia CD lấy F sao cho** $CF=\frac{BC}{2}$**. Gọi I là giao điểm của AE và BF. Chứng minh A, B, I, C cùng thuộc một đường tròn.**

HƯỚNG DẪN ĐỀ KIỂM TRA
HỌC SINH GIỎI VÒNG 1 LỚP 9
Quận 3 (2015-20156)

Bài 1

a) **Cho** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}(a,b,c\neq 0)$ **Chứng minh** $\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}$

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c}\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}=\frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$

$$\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0\Leftrightarrow(a+b)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{c(a+b+c)}\right)=0\Leftrightarrow(a+b)\left[\frac{ca+cb+c^2+ab}{abc(a+b+c)}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

TH1: a = -b, khi đó: $\begin{cases}\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{c^{2015}}\\ \frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}=\frac{1}{c^{2015}}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}$

TH2: b = -c, khi đó: $\begin{cases}\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{a^{2015}}\\ \frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}=\frac{1}{a^{2015}}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}$

TH3: c = -a, khi đó: $\begin{cases}\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{b^{2015}}\\ \frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}=c\frac{1}{c^{2015}}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}$

Vậy $\frac{1}{a^{2015}}+\frac{1}{b^{2015}}+\frac{1}{c^{2015}}=\frac{1}{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}$

b) **Rút gọn** $B=\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ **với** $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}-\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)(0<a<1)$

Ta có: $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}-\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)(0<a<1)$ $\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1-a}{a}-2+\frac{a}{1-a}\right)$

$\Leftrightarrow x^2+1=\frac{1}{4}\left(\frac{1-a}{a}-2+\frac{a}{1-a}\right)+\frac{4}{4}$ $\Leftrightarrow x^2+1=\frac{1}{4}\left(\frac{1-a}{a}+2+\frac{a}{1-a}\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)^2}$ $\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)$

Thế vào $B=\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$**, ta được:**

$$B=\frac{2a\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}-\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow B=\frac{a\frac{1-a+a}{\sqrt{a}\sqrt{1-a}}}{\sqrt{\frac{a}{1-a}}}=\frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1-a}}}{\sqrt{\frac{a}{1-a}}}=1$$

c) Tính : $x=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

Ta có: $x=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

$$\Leftrightarrow x^3=9+4\sqrt{5}+3\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}.\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)+9-4\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x^3=18+3(x)(1)$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x-18=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+6)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right]$$

$$\Leftrightarrow x=3$$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $x^5=x^4+x^3+x^2+x+2$

Ta có: $x^5=x^4+x^3+x^2+x+2$

$$\Leftrightarrow x^5-x^4-x^3-x^2-x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x^5-2x^4+x^4-2x^3+x^3-2x^2+x^2-2x+x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x^4(x-2)+x^3(x-2)+x^2(x-2)+x(x-2)+(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x^4+x^3+x^2+x+1=0\quad(1)\end{array}\right.$$

Giải (1) : ta có: $x^4+x^3+x^2+x+1=0\ \Leftrightarrow\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}+1\right)^2+\frac{x^2}{2}=0$ **(vô lí)**

b) $8x^2+\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{5}{2}$

Điều kiện: $x>0$**; đặt** $t=\sqrt{\frac{1}{x}}\ (t>0)\Rightarrow x=\frac{1}{t^2}$**, phương trình đã cho trở thành :**

$$\frac{8}{t^4}+t=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2t^5-5t^4+16=0\Leftrightarrow (t-2)^2\left(2t^3+3t^2+4t+4\right)=0\Leftrightarrow t=2$$

Với t = 2 $\Leftrightarrow \mathbf{x=\frac{1}{4}}$

c) $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=2 & (1) \\ y+\dfrac{1}{z}=2 & (2) \\ z+\dfrac{1}{x}=2 & (3) \end{cases}$

Điều kiện : $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0,$

Từ pt (1) ta suy ra $y=\dfrac{1}{2-x}$

Từ pt (3) ta suy ra $z=\dfrac{2x-1}{x}$

Thế vào pt (2), ta được: $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{\dfrac{2x-1}{x}}=2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2-x}+\dfrac{x}{2x-1}=2 \quad (4)$

Điều kiện: $x \neq 2,\ x \neq \dfrac{1}{2}$

Với điều kiện trên, pt (4) trở thành: $\dfrac{2x-1+x(2-x)}{(2-x)(2x-1)}=\dfrac{2(2-x)(2x-1)}{(2-x)(2x-1)}$

$\Rightarrow 2x-1+x(2-x)=2(2-x)(2x-1)$

$\Leftrightarrow 2x-1+2x-x^2=2(4x-2x^2+x-2)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+3=0$

$\Leftrightarrow 3(x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow x=1$

suy ra y =1 ; z =1

Vậy hệ phương trình có nghiệm: (x, y, z) = (1, 1, 1)

Bài 3 **Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:** $M=-5x^2-2xy-2y^2+14x+10y-1$

Ta có : $M=-5x^2-2xy-2y^2+14x+10y-1$

$\Leftrightarrow -2M=4y^2+4xy-20y+10x^2-28x+2$

$\Leftrightarrow -2M=(2y)^2+2(2y)(x-5)+(x-5)^2-(x-5)^2+10x^2-28x+2$

$\Leftrightarrow -2M=(2y+x-5)^2+9x^2-18x-23$

$\Leftrightarrow -2M=(2y+x-5)^2+(3x-3)^2-32$

$\Leftrightarrow M=\dfrac{-1}{2}\left[(2y+x-5)^2+(3x-3)^2-32\right]\leq 16$

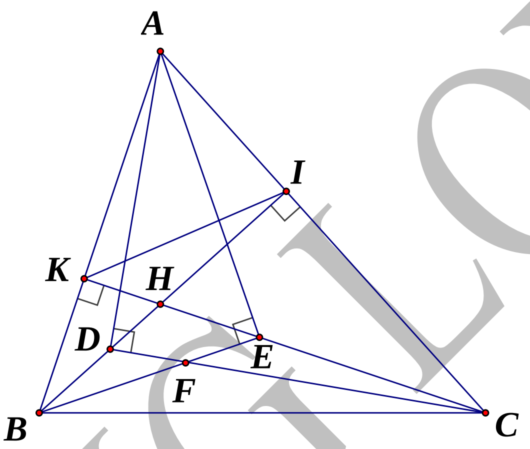
Vậy $M_{max}=16$**. Dấu ''='' xảy ra khi:** $\begin{cases} 3x-3=0 \\ 2y+x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Bài 4: **Chứng minh rằng** $10^n+18n-28 \vdots 27, \forall n \in N$

Ta có :

$$\begin{aligned}10^n+18n-28&=10^n-1+18n-27\\&=(10-1)\left(10^{n-1}+10^{n-2}+...+1\right)+18n-27\\&=9\left[(9+1)^{n-1}+(9+1)^{n-2}+...+(9+1)^2+(9+1)+1\right]+18n-27\\&=9(9k+n)+18n-27\\&=81k+27n-27\\&=27(3k+n-1)\vdots 27\end{aligned}$$

<u>Bài 5:</u> Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC), các đường cao BI và CK cắt nhau tại H. Trên đoạn BH lấy điểm D sao cho $\widehat{ADC}$ bằng 90^0. Gọi F là giao điểm của BE và CD. Chứng minh $\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{DF^2}=\frac{4}{DE^2}$.



Gọi O là giao điểm của AF và DE.

Dễ chứng minh được: $\begin{cases}AD^2=AI.AC\ \ (HTL)\\AE^2=AK.AB\ \ (HTL)\\AI.AC=AK.AB\ (\Delta AIB\backsim\Delta AKC)\end{cases}\Rightarrow AD=AE\Rightarrow \Delta ADE$ cân tai A

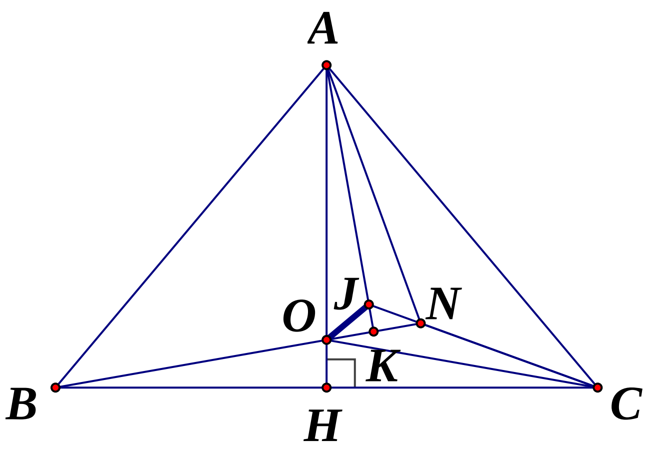
Ta có: $\begin{cases}\widehat{FDE}+\widehat{ADE}=\widehat{FDA}\\\widehat{FED}+\widehat{AED}=\widehat{FEA}\\\widehat{FDA}=\widehat{FEA}\left(=90^0\right)\\\widehat{ADE}=\widehat{AED}\left(\Delta ADE\text{ cân tại A}\right)\end{cases}\Rightarrow \widehat{FDE}=\widehat{FED}\Rightarrow\Delta FDE$ **cân tại F** $\Rightarrow$ **FD=FE**

Ta có: $\begin{cases}AD=AE\\FD=FE\end{cases}\Rightarrow$ **AF là đường trung trực của đoạn thẳng DE**

$\Rightarrow\begin{cases}AF\perp DE\text{ tại O}\\O\ \text{ là trung điểm của DE.}\end{cases}$

Xét ΔADF **vuông tại D, ta có: DO là đường cao** $\Rightarrow\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{DF^2}=\frac{1}{DO^2}=\frac{4}{DE^2}$

<u>Bài 6</u>: Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=50^0$. Lấy N là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{NBC}=10^0$ và $\widehat{NCB}=20^0$. Chứng minh: $\tan\widehat{ANB}.\tan\widehat{NBC}=1$.



Kẻ đường cao AH cắt BN tại O, AK vuông góc với BN tại K, CN cắt AK tại J.

ΔBOC **cân tại O** $\Rightarrow OCH = OCN = 10^0 \Rightarrow ACO = OAC = 40^0 \Rightarrow OA = OC$

$AON = BOH = 80^0 \Rightarrow OAJ = 10^0 \Rightarrow JAC = JCA = 30^0 \Rightarrow \Delta AJC$ **cân tại J.** $\Rightarrow AJ = JC$

Mà $OA = OC$ **. Nên OJ là đường trung trực của AC.** $\Rightarrow$ **OJ là phân giác của** AOC

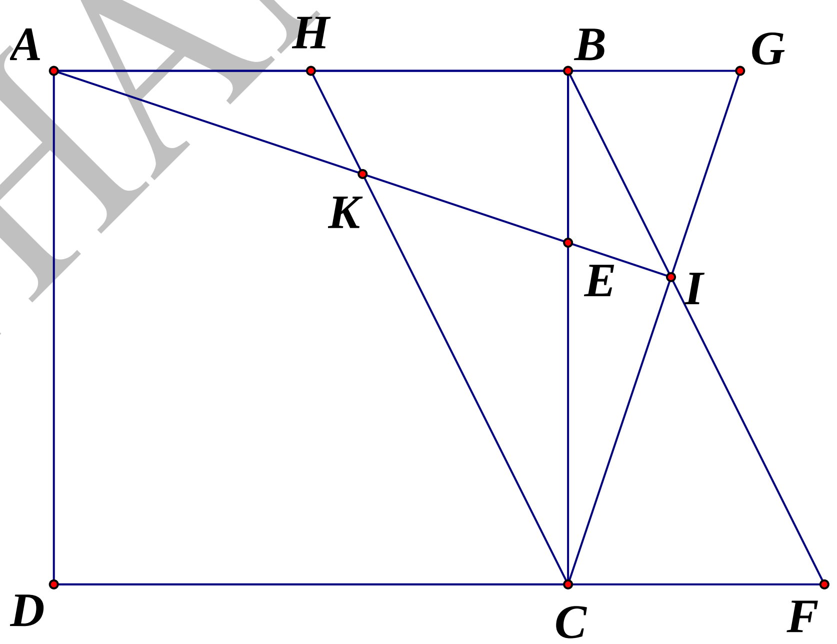
$\Rightarrow JOC = 50^0 \left(\text{do } AOC = 100^0\right)$ **. Mà** $NOC = 20^0$ **(góc ngoài của** ΔOBC**)**

Nên $JON = 30^0 = JNO\left(\text{góc ngoài } \Delta BNC\right) \Rightarrow \Delta OJN$ **cân t ại J** $\Rightarrow$ **K là trung điểm của ON.**

$\Rightarrow \Delta AON$ **cân tại A** $\Rightarrow ANB = AON = 80^0$

Vậy $\tan ANB.\tan NBC = \tan 80^0.\tan 10^0 = \tan 80^0.\cot 80^0 = 1$

<u>Bài 7:</u> Trên cạnh BC của hình vuông ABCD lấy $BE = \dfrac{BC}{3}$ **; trên tia đối của tia CD lấy F sao cho** $CF = \dfrac{BC}{2}$ **. Gọi I là giao điểm của AE và BF. Chứng minh A, B, I, C cùng thuộc một đường tròn.**



Gọi G là giao điểm của CI và AB; H là trung điểm của AB, K là giao điểm của CH và AI.

Ta có: $\Delta BEI \backsim \Delta CEK(g-g) \Rightarrow \frac{BI}{CK} = \frac{BE}{CE} = \frac{1}{2} \Rightarrow CK = 2BI$

Mà BI = 2HK (Vì HK là đường trung bình của ΔABI)

Nên CK = 4HK

Do đó: $\frac{CK}{CH} = \frac{4}{5}$ **mà CK = 2BI nên** $\frac{2BI}{CH} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{BI}{CH} = \frac{2}{5}$

Mà $\frac{GB}{GH} = \frac{BI}{CH}$ **(hệ quả Thales)**

nên $\frac{GB}{GH} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{GB}{HB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{GB}{AB} = \frac{1}{3}$ **mà** $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$ **và AB = BC nên GB = BE**

Xét ΔGBC **và** ΔEBA **, ta có:**

$$\begin{cases} BG = BE(cmt) \\ BC = BA(ABCD \text{ là hình vuông}) \Rightarrow \Delta CBG = \Delta ABE(c-g-c) \Rightarrow BCG = BAE \\ ABE = CBG(=90^0) \end{cases}$$

$\Rightarrow ECI = BAE$

Xét ΔEIC **và** ΔEBA **, ta có:**

$$\begin{cases} CEI = AEB(\text{2 góc đối đỉnh}) \\ ECI = BAE(cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta EIC \backsim \Delta EBA \Rightarrow EIC = EBA = 90^0$$

Vậy A, B, I, C cùng thuộc một đường tròn.

---HẾT---